Les Suites Numériques  المتتاليات العددية

تمرين 1

لتكن $(U_n)_n$ المتتالية المعرفة كما يلي : $U_0 = 5$ و $5U_{n+1} = 3U_n + 8$

1) نضع : $V_n = U_n - 4$ لكل n من $\mathbb{N}$. بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها.

2) حدد U_n بدلالة n.

3) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها.

(2 نقط) اكاديمية المحمدية (دورة فبراير 2001)

الحل

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ 5U_{n+1} = 3U_n + 8 \end{cases}$$

(1 $V_n = U_n - 4$

لنبين أن (V_n) متتالية هندسية.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 4$$
$$= \frac{1}{5}(3U_n + 8) - 4$$
$$= \frac{1}{5}(3U_n + 8 - 20)$$
$$= \frac{1}{5}(3U_n - 12)$$
$$= \frac{3}{5}(u_n - 4)$$
$$= \frac{3}{5} V_n$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_{n+1} = \frac{3}{5} V_n$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$.

2) لدينا $V_0 = U_0 - 4 = 1$

إذن $V_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$

ومنه فإن $U_n = V_n + 4$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n + 4$

3) * لدينا

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)^n \left[\frac{3}{5} - 1\right]$$
$$= -\left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \frac{2}{5} < 0$$

إذن (U_n) متتالية تناقصية.

* بما أن $U_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n + 4 > 0$ فإن (U_n) متتالية مصغورة.

إذن (U_n) متتالية تناقصية ومصغورة ، إذن (U_n) متتالية متقاربة.

* بما أن $-1 < \frac{3}{5} < 1$

فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

ومنه فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = 4$

تمرين 2

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة ب :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = \frac{1}{3}(U_{n+1} + 2U_n) \end{cases}$$

ولتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $V_n = U_{n+1} - U_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) a - احسب U_2 و V_0.

b - بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها.

2) a - احسب بدلالة n $(n \in \mathbb{N}^*)$ المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$.

b - بين أن $U_n = S_n + U_0$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c - احسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

(3,5 نقطة) أكاديمية وجدة (دورة يونيو 2001)

الحل

المتتالية (U_n) معرفة بما يلي
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \quad , \quad U_1 = 2 \\ U_{n+2} = \frac{1}{3}(U_{n+1} + 2U_n) \quad ; n \in \end{cases}$$

و $V_n = U_{n+1} - U_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

1) a -
$$U_2 = \frac{1}{3}(U_1 + 2U_0) = \frac{8}{9}$$
$$V_0 = U_1 - U_0 = \frac{5}{3}$$

b - ليكن n من $\mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+2} - U_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}(U_{n+1} + 2U_n) - U_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}(U_{n+1} + 2U_n - 3U_{n+1}) \\ &= \frac{1}{3}(2U_n - 2U_{n+1}) \\ &= -\frac{2}{3}(U_{n+1} - U_n) \end{aligned}$$

إذن
$$\boxed{n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_{n+1} = -\frac{2}{3}V_n}$$

ومنه فإن (V_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$.

2) a -
$$\begin{aligned} S_n &= V_0 + V_1 + ... + V_{n-1} \\ &= \frac{V_0(1 - q^n)}{1 - q} \\ &= \frac{\frac{5}{3}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1 + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{\frac{5}{3}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

إذن
$$\boxed{S_n = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

b -
$$\begin{aligned} + \; V_0 &= U_1 - U_0 \\ + \; V_1 &= U_2 - U_1 \\ &\vdots \\ + \; V_{n-1} &= U_n - U_{n-1} \end{aligned}$$
$$\overline{V_0 + V_1 + ... + V_{n-1} = U_n - U_0}$$

أي
$$S_n = U_n - U_0$$

إذن
$$\boxed{U_n = S_n + U_0}$$

c - لدينا
$$U_n = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}$$

بما أن
$$= \frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$
$$-1 < -\frac{2}{3} < 1$$

فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$

ومنه فإن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{4}{3}}$

تمرين 3

نعتبر المتتالية (U_n) العددية المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3 - \sqrt{3 - U_n} \end{cases}$$

1) أ - بين أن (U_n) مكبورة بالعدد 2.

ب - بين أن (U_n) تزايدية.

2) أ - بين أن : $|U_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب - استنتج : $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

4) نقط) أكاديمية الجديدة (دورة فبراير 2001)

الحل

المتتالية (U_n) معرفة بما يلي
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3 - \sqrt{3 - U_n} \quad ; \quad n \in \end{cases}$$

1) أ - لنبين أن (U_n) مكبورة بالعدد 2.

* لدينا $U_0 = 1$ إذن $U_0 \leq 2$.
* نفترض أن $U_n \leq 2$ من أجل n من $\mathbb{N}$.
* لنبين أن $U_{n+1} \leq 2$.

لدينا : $2 - U_{n+1} = 2 - (3 - \sqrt{3 - U_n})$
$$= \sqrt{3 - U_n} - 1$$

لدينا $U_n \leq 2$،
$$U_n \leq 2 \Rightarrow -U_n \geq -2$$
$$\Rightarrow 3 - U_n \geq 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{3 - U_n} \geq 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{3 - U_n} - 1 \geq 0$$
$$\Rightarrow 2 - U_{n+1} \geq 0$$

إذن $U_{n+1} \leq 2$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_n \leq 2}$

الخلاصة : المتتالية (U_n) مكبورة للعدد 2.

ب - لدينا
$$U_{n+1} - U_n = 3 - \sqrt{3 - U_n} - U_n$$
$$= (3 - U_n) - \sqrt{3 - U_n}$$
$$= \sqrt{3 - U_n}\left(\sqrt{3 - U_n} - 1\right)$$

من خلال السؤال السابق لدينا $\sqrt{3 - U_n} \geq 1$

أي $\sqrt{3 - U_n} - 1 \geq 0$ و $\sqrt{3 - U_n} \geq 0$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_{n+1} - U_n \geq 0}$

وبالتالي فإن المتتالية (U_n) تزايدية.

2) أ - لدينا :
$$2 - U_{n+1} = \sqrt{3 - U_n} - 1$$
$$= \frac{3 - U_n - 1}{\sqrt{3 - U_n} + 1}$$

$$= \frac{2 - U_n}{\sqrt{3 - U_n} + 1}$$

وبما أن $U_n \leq 2$

فإن $3 - U_n \geq 1$

ومنه فإن $\sqrt{3 - U_n} + 1 \geq 2$

وبالتالي فإن $\frac{1}{\sqrt{3 - U_n} + 1} \leq \frac{1}{2}$

ومنه فإن $\frac{2 - U_n}{\sqrt{3 - U_n} + 1} \leq \frac{2 - U_n}{2}$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; 2 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - U_n)}$

$$0 \leq 2 - U_1 \leq \frac{1}{2}(2 - U_0)$$
x
$$0 \leq 2 - U_2 \leq \frac{1}{2}(2 - U_1)$$
x
$$\vdots$$
x
$$0 \leq 2 - U_n \leq \frac{1}{2}(2 - U_{n-1})$$

$$0 \leq 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - U_0)$$

وبما أن $U_0 = 1$

فإن $0 \leq 2 - U_n \leq \frac{1}{2^n}$

ومنه فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; |U_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}$

ب - بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

فإن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

ومنه فإن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 2}$

تمرين 4

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in N}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = -1$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{2U_n + 4}$ لكل n من N.

1) أ - بين أن : $-1 \leq U_n \leq 0$ لكل n من N.

ب - ادرس رتابة المتتالية U_n.

2) لكل n من N، نضع : $V_n = \frac{U_n}{2U_n + 3}$.

أ - بين أن المتتالية $(V_n)_{n \in N}$ هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

ب - استنتج U_n بدلالة n ثم حدد نهاية المتتالية (U_n).

(4 نقط) أكاديمية الدار البيضاء أنفا (دورة فبراير 2001)

الحل

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2U_n + 4} \end{cases} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1) أ ـ لنبين أن $-1 \le U_n \le 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

* لدينا $U_0 = -1$ إذن $-1 \le U_0 \le 0$

* نفترض أن $-1 \le U_p \le 0$ من أجل p من $\mathbb{N}$.

لنبين أن $-1 \le U_{p+1} \le 0$

لدينا $\dfrac{x}{2x+4} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x+2}$ لكل x من $\mathbb{R} - \{-2\}$

إذن :

$$-1 \le U_p \le 0 \Rightarrow 1 \le U_p + 2 \le 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{U_p + 2} \le 1$$
$$\Rightarrow -1 \le -\frac{1}{U_p+2} \le -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 1 \le \frac{1}{2} - \frac{1}{U_p+2} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{U_p}{2U_p+4} \le 0$$
$$\Rightarrow -1 \le U_{p+1} \le 0$$

إذن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad -1 \le U_n \le 0}$

ب ـ لندرس رتابة المتتالية (U_n).

لدينا

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2U_n+4} - U_n$$
$$= \frac{U_n - U_n(2U_n+4)}{2U_n+4}$$
$$= \frac{-U_n(2U_n+3)}{2U_n+4}$$

بما أن $-1 \le U_n \le 0$

فإن $0 \le -U_n \le 1$ و $1 \le 2U_n + 3 \le 3$ و $2 \le 2U_n + 4 \le 4$

ومنه فإن $\dfrac{-U_n(2U_n+3)}{2U_n+4} \ge 0$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_{n+1} - U_n \ge 0}$

الخلاصة :

المتتالية (U_n) تزايدية.

(2

$$V_n = \frac{U_n}{2U_n+3} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

أ ـ

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{2U_{n+1}+3}$$
$$= \frac{\dfrac{U_n}{2U_n+4}}{2\dfrac{U_n}{2U_n+4} + 3}$$
$$= \frac{\dfrac{U_n}{2U_n+4}}{\dfrac{2U_n + 6U_n + 12}{2U_n+4}}$$
$$= \frac{U_n}{8U_n+12}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{U_n}{2U_n+3}\right)$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n}$

الخلاصة :

(V_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$.

ب ـ * لدينا $V_0 = \dfrac{U_0}{2U_0+3} = -1$ إذن $V_n = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

* $V_n = \dfrac{U_n}{2U_n+3} \Rightarrow (2U_n+3)V_n = U_n$

$$\Rightarrow 3V_n = U_n(1 - 2V_n)$$
$$\Rightarrow U_n = \frac{3V_n}{1-2V_n}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_n = \dfrac{-3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + 2.\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$

* بما أن $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$

ومنه فإن $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$

تمرين 5

لتكن (U_n) المتتالية العددية حيث : $U_0 = -2$ و $3U_{n+1} = 2U_n - 3 \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$

1) بين أنه : $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; U_n > -3$

2) بين أن (U_n) متتالية تناقصية.

3) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $V_n = \dfrac{1}{U_n + 3}$

a - بين أن متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{2}$

b - احسب V_n ثم U_n بدلالة n

c - احسب نهاية (U_n)

(4 نقط) أكاديمية مراكش (دورة فبراير 2001)

الحل

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ 3U_{n+1} = 2U_n - 3 \quad ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) لنبين أن $U_n > -3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

* لدينا $U_0 = -2$ إذن $U_0 > -3$.

* نفترض أن $U_p > -3$ من أجل p من $\mathbb{N}$.

* لنبين أن $U_{p+1} > -3$.

$$\begin{aligned} U_p > -3 &\Rightarrow 2U_p \geq -6 \\ &\Rightarrow 2U_p - 3 \geq -9 \\ &\Rightarrow 3U_{p+1} \geq -9 \\ &\Rightarrow U_{p+1} \geq -3 \end{aligned}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; U_n > -3}$

2) لنبين أن (U_n) تناقصية.

لدينا

$$\begin{aligned} U_n - U_{n+1} &= U_n - \frac{1}{3}(2U_n - 3) \\ &= \frac{1}{3}(3U_n - 2U_n + 3) \\ &= \frac{1}{3}(U_n + 3) \end{aligned}$$

بما أن $U_n > -3$ فإن $\frac{1}{3}(U_n + 3) > 0$

ومنه فإن $U - U_{n+1} > 0$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; U_{n+1} < U_n}$

الخلاصة : المتتالية (U_n) تناقصية.

3) $V_n = \dfrac{1}{U_n + 3} \;;\; n \in \mathbb{N}$

a -

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{1}{U_{n+1} + 3} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{3}(2U_n - 3) + 3} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{3}(2U_n - 3 + 9)} \\ &= \frac{3}{2U_n + 6} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{U_n + 3}\right) \end{aligned}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n}$

الخلاصة : (V_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{2}$

b - * لدينا $V_0 = \dfrac{1}{U_0 + 3}$ أي $V_0 = 1$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; V_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n}$

* $V_n = \frac{1}{U_n + 3} \Rightarrow U_n + 3 = \frac{1}{V_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n} - 3$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}$

c - بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -3}$

تمرين 6

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$U_0 = 0$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + \frac{3}{2}$

أ - بين بالترجع أن : $U_n < 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

ب - بين أن المتتالية (U_n) تزايدية قطعا.

2) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة واحسب نهايتها

3) أ - بين بالترجع أن : $U_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{3}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

ب - استنتج من جديد حساب نهاية المتتالية (U_n).

(4 نقط) أكاديمية سطات (دورة فبراير 2001)

الحل

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + \frac{3}{2} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) أ - لنبين أن $U_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

* لدينا $U_0 = 0$ إذن $U_0 < 0$

* نفترض أن $U_p < 3$ من أجل p من $\mathbb{N}$.

* لنبين أن $U_{p+1} < 3$

$U_p < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} U_p < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} U_p + \frac{3}{2} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$

$\Rightarrow U_{p+1} < 3$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_n < 3}$

ب - لدينا $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n + \frac{3}{2} - U_n$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} U_n$

$= \frac{1}{2} (3 - U_n)$

بما أن $U_n < 3$ فإن $3 - U_n > 0$

ومنه فإن $U_{n+1} - U_n > 0$

وبالتالي فإن المتتالية (U_n) تزايدية قطعا.

2) * بما أن المتتالية (U_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 3 فإنها متقاربة.

* بما أن $U_0 = 0$ و (U_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 3

فإن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq U_n \leq 3}$

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2} x + \frac{3}{2}$

لدينا f دالة متصلة على المجال $I = [0, 3]$ و I و $f(I) = \left[\frac{3}{2}, 3\right]$

بما أن f دالة متصلة على I و $f(I) \subset I$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ و (U_n) متتالية متقاربة فإن نهاية ℓ نهاية (U_n) تحقق العلاقة $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ell+\frac{3}{2}=\ell$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{1}{2}\ell$$
$$\Leftrightarrow \ell=3$$

إذن
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n=3}$$

3) أ. • لدينا $U_1=\frac{3}{2}=\frac{3}{2^1}$

• نفترض أن $U_n=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\dots+\frac{3}{2^n}$

• لنبين أن $U_{n+1}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\dots+\frac{3}{2^{n+1}}$

لدينا
$$U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\dots\dots+\frac{3}{2^n}\right)+\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots\dots+\frac{3}{2^{n+1}}+\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\dots\dots+\frac{3}{2^{n+1}}$$

إذن
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \ ; \ U_n=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\dots\dots+\frac{3}{2^n}}$$

ب.
$$U_n=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\dots\dots+\frac{3}{2^n}$$
$$=\frac{3}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\dots\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$
$$=\frac{3}{2}\;\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}\;\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{U_n=3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$$

بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

ومنه فإن
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n=3}$$

تمرين 7

1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي : $f(x)=\frac{x-8}{2x-9}$.

أ. بين أن f تزايدية على المجال I.

ب. بين أن : $f(I)\subset I$.

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n-8}{2U_n-9} \ ; \ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ ; \ 0\le U_n\le 1$.

ب. بين أن (U_n) تزايدية واستنتج أنها متقاربة.

ج. احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

(3,5 نقطة) **أكاديمية الرباط** (دورة فبراير 2001)

الحل

$f(x)=\frac{x-8}{2x-9}$; $x\in I$, $I=[0,1]$

أ. بما أن $\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}=7>0$

فإن f تزايدية على I

ملاحظة : يمكن استعمال معدل التغير أو الدالة المشتقة.

ب -
$$\left.\begin{array}{l}0 \leq x \leq 1\\ f \text{ تزايدية}\end{array}\right\} \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$
$$\Rightarrow \frac{8}{9} \leq f(x) \leq 1$$
$$\Rightarrow f(x) \in I$$

إذن
$$\boxed{f(I) \subset I}$$

(2
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9} \end{cases}$$

أ - نلاحظ أن $U_{n+1} = f(U_n)$

- لدينا $U_0 = 0$ إذن $0 \leq U_n \leq 1$
- نفترض أن $0 \leq U_n \leq 1$
- لنبين أن $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

$$0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow U_n \in I$$
$$\Rightarrow f(U_n) \in f(I)$$
$$\Rightarrow f(U_n) \in I \quad (\text{لأن } f(I) \subset I)$$
$$\Rightarrow U_{n+1} \in I$$
$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

إذن
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 0 \leq U_n \leq 1}$$

ب - لدينا $U_1 = \frac{8}{9}$ و $U_0 = 0$

إذن $U_0 \leq U_1$

- نفترض أن $U_{n-1} \leq U_n$
- لنبين أن $U_n \leq U_{n+1}$

$$\left.\begin{array}{l}U_{n-1} \leq U_n\\ f \text{ تزايدية}\end{array}\right\} \Rightarrow f(U_{n-1}) \leq f(U_n)$$
$$\Rightarrow U_n \leq U_{n+1}$$

إذن
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_n \leq U_{n+1}}$$

بما أن (U_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 1 و $f(I) \subset I$ و $U_{n+1} = f(U_n)$
و (U_n) متقاربة فإن نهاية ℓ (U_n) تحقق العلاقة $\ell = f(\ell)$.

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{\ell - 8}{2\ell - 9}$$
$$\Leftrightarrow 2\ell^2 - 9\ell = \ell - 8$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 - 5\ell + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\ell - 1)(\ell - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ell = 1 \quad \text{أو} \quad \ell = 4$$

بما أن $0 \leq U_n \leq 1$

فإن
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 1}$$

تمرين 8

نعتبر المتتالية العددية (U_n) بحيث :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \quad , \quad U_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$$

1) احسب U_2 و U_3.

2) نعتبر المتتالية (V_n) بحيث : $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

أ - بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب - استنتج أن : $V_n = 2^n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

3) أ - بين أن (U_n) متتالية تزايدية وموجبة.

ب - أثبت أن : $U_{n+1} \geq 2^n$, $(\forall n \in \mathbb{N})$ واستنتج $\lim\limits_{n \to -\infty} U_n$.

(دورة فبراير 2001 أكاديمية القنيطرة) نقطة 3,5

الحل

$$\begin{cases} U_0 = 0 \quad , \quad U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \; ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1
$$U_2 = 3U_1 - 2U_0 = 3$$
$$U_3 = 3U_2 - 2U_1 = 7$$

2) $V_n = U_{n+1} - U_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

أ -
$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$$
$$= 3U_{n+1} - 2U_n - U_{n+1}$$
$$= 2(U_{n+1} - U_n)$$
$$= 2V_n$$

إذن
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_{n+1} = 2V_n}$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $V_0 = U_1 - U_0 = 1$

ب - $V_n = V_0 . 2^n$

إذن
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_n = 2^n}$$

3) * لدينا $U_{n+1} - U_n = V_n = 2^n > 0$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_{n+1} > U_n$

إذن (U_n) متتالية تزايدية.

* بما أن (U_n) متتالية تزايدية.

فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_n \geq U_0$

أي
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_n \geq 0}$$

إذن (U_n) متتالية موجبة.

ب - * لدينا $V_n = U_{n+1} - U_n$

إذن $U_{n+1} = V_n + U_n$

بما أن $U_n \geq 0$ فإن $V_n + U_n \geq V_n$

أي $U_{n+1} \geq V_n$

ومنه فإن
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_{n+1} \geq 2^n}$$

* بما أن $2 > 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

ومنه فإن $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = +\infty$

أي
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$$

تمرين 9

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ والعلاقة $3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لتكن المتتالية العددية بحيث : $v_n = u_n - n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) أ - بين أن (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب - استنتج أن $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. ثم احسب نهاية (u_n).

2) أ - احسب الجمعين $s = 1 + 2 + 3 + 4 .... + 98 + 99$ و $s' = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{98} + \left(\frac{2}{3}\right)^{99}$.

ب - استنتج أن : $u_0 + u_1 + ... + u_{98} + u_{99} = 4953 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$.

(4 نقط) اكاديمية ابن امسيك الدار البيضاء (دورة فبراير 2001)

الحل

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ 3U_{n+1} = 2U_n + n + 3 \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$V_n = U_n - n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1) أ - • لدينا $V_0 = U_0 - 0 = 1$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1)$$
$$= \frac{1}{3}(2U_n + n + 3) - (n+1)$$
$$= \frac{1}{3}(2U_n + n + 3 - 3n - 3)$$
$$= \frac{1}{3}(2U_n - 2n)$$
$$= \frac{2}{3}(U_n - n)$$
$$= \frac{2}{3}V_n$$

إذن
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n}$$

الخلاصة : (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $V_0 = 1$

ب - * بما أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $V_0 = 1$ إذن $V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ،

* بما أن $V_n = U_n - n$

فإن $U_n = V_n + n$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

* بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

فإن $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

2) أ - * $s = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99$

$$= \frac{99\,(1 + 99)}{2}$$

$$= \frac{99.\ 100}{2}$$

$$\boxed{s = 4950}$$

(ملاحظة : s هي مجموع حدود متتالية حسابية)

* $$s' = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{99}$$

$$= \frac{1\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{99+1} - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1}$$

$$= \frac{s.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{100} - 1\right]}{-\frac{1}{3}}$$

إذن $\boxed{s' = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right]}$

(ملاحظة : s' هي مجموع حدود متتالية هندسية)

ب -

$$U_0 + U_1 + ... + U_{99} = 1 + \left(\frac{2}{3} + 1\right) + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\right] + .. \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{99} + 99\right]$$

$$= \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{99}\right] + [1 + 2 + ... + 99]$$

$$= s' + s$$

$$= 3 - 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{100} + 4950$$

إذن $\boxed{U_0 + U_1 + ... + U_{99} = 4953 - 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{100}}$

تمرين 10

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ بحيث :

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ U_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + U_n^3}{8}} \quad ; \; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) أ - بين بالترجع أن : $\forall n \in \; ; \; U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

ب - استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ (لاحظ أن $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{U_n^3}\right)$)

2) بين أن $(U_n)_n$ متقاربة.

3) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $V_n = \frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8}$.

بين أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $\frac{1}{8}$.

4) احسب U_n بدلالة n. استنتج $\lim U_n$.

(دورة فبراير 2001) أكاديمية اكادير (نقط 4)

الحل

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{7}} \\ U_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{1+U_n^3}{8}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) أ- لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

- لدينا $U_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ إذ $U_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$
- نفترض أن $U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$
- لنبين أن $U_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

$$U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}} \Rightarrow U_n^3 > \frac{1}{7}$$
$$\Rightarrow \frac{1+U_n^3}{8} > \frac{1}{7}$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1+4n^3}{8}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$
$$\Rightarrow U_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}}$

ب- لدينا $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{U_n^3}\right)$

بما أن $U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ فإن $U_n^3 > \frac{1}{7}$

ومنه فإن $\frac{1}{U_n^3} < 7$

وبالتالي فإن $\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{U_n^3}\right) < \frac{1}{8}(1+7)$

أي $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)^3 < 1$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1}$

ملاحظة : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;;\; a^3 < b^3 \Leftrightarrow a < b$

2) * بما أن $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ و $U_n > 0$

فإن $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; U_{n+1} < U_n$

ومنه فإن (U_n) تناقصية.

وبما أن $\forall n \in \mathbb{N} \;;\; U_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

فإن (U_n) تناقصية ومصغورة بالعدد $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

ومنه فإن (U_n) متقاربة.

3)
$$V_n = \frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8}$$
$$V_{n+1} = \frac{7}{8}U_{n+1}^3 - \frac{1}{8}$$
$$= \frac{7}{8}\,\frac{1+U_n^3}{8} - \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{7+7U_n^3-8}{8}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8}\right)$$
$$= \frac{1}{8}V_n$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; V_{n+1} = \frac{1}{8}V_n}$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{8}$

4) * لدينا $V_0 = \frac{7}{8}.\,U_0^3 - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

إذن $V_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n.\,\frac{1}{8}$

أي $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; V_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}$

* $V_n = \frac{7}{8}U_n^3 - \frac{1}{8} \Rightarrow U_n^3 = \frac{8V_n+1}{7}$

$$\Rightarrow U_n = \sqrt[3]{\frac{8V_n+1}{7}}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; U_n = \sqrt[3]{\dfrac{\left(\frac{1}{8}\right)^n + 1}{7}}}$

* بما أن $-1 < \frac{1}{8} < 1$ $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ ومنه فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

تمرين 11

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{3 + U_n^2}{1 + U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $U_n > 0$

2) أ - تحقق من أن لكل n من $\mathbb{N}$: $3 - U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + U_n}(3 - U_n)$

ب - بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $U_n < 3$

3) بين أن المتتالية (U_n) تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.

4) أ - بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{U_n}{1 + U_n} - \frac{3}{4} < 0$

ب - بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 < 3 - U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^n (3 - U_0)$

ج - استنتج نهاية (U_n).

(4,25 نقطة) أكاديمية مكناس (دورة فبراير 2001)

الحل

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3 + U_n^2}{1 + U_n} \end{cases}$$

1) • لدينا $U_0 = 1$ إذن $U_0 > 0$

• نفترض أن $U_p > 0$ من p من $\mathbb{N}$.

• لنبين أن $U_{p+1} > 0$

$$U_p > 0 \Rightarrow 3 + U_p^2 > 0 \text{ و } 1 + U_p > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3 + U_p^2}{1 + U_p} > 0$$

$$\Rightarrow U_{p+1} > 0$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_n > 0$

2) أ .

$$3 - U_{n+1} = 3 - \frac{3 + U_n^2}{1 + U_n}$$

$$= \frac{3 + 3U_n - 3 - U_n^2}{1 + U_n}$$

$$= \frac{3U_n - U_n^2}{1 + U_n}$$

$$= \frac{U_n}{1 + U_n}(3 - U_n)$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 3 - U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + U_n}(3 - U_n)$

ب - • لدينا $U_0 = 1$ إذن $U_0 < 3$

• نفترض أن $U_p < 3$ من أجل p من $\mathbb{N}$

• لنبين أن $U_{p+1} < 3$

$$U_p < 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 - U_p > 0 \\ \frac{U_p}{1 + U_p} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{U_p}{1 + U_p}(3 - U_p) > 0$$

$$\Rightarrow 3 - U_{p+1} > 0$$

$$\Rightarrow U_{p+1} < 3$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_n < 3}$

3) لدينا :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3 + U_n^2}{1 + U_n} - U_n$$

$$= \frac{3 + U_n^2 - U_n(1 + U_n)}{1 + U_n}$$

$$= \frac{3 + U_n^2 - U_n - U_n^2}{1 + U_n}$$

$$= \frac{3 - U_n}{1 + U_n}$$

بما أن $0 < U_n < 3$ فإن $3 - U_n > 0$ و $1 + U_n > 0$

ومنه فإن $\frac{3 - U_n}{1 + U_n} > 0$

وبالتالي فإن $U_{n+1} - U_n > 0$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad U_{n+1} > U_n}$

إذن (U_n) تزايدية قطعا.

* بما أن (U_n) تزايدية ومكبورة فإنها متقاربة

4) أ - لدينا $\frac{U_n}{1 + U_n} - \frac{3}{4} = \frac{U_n - 3}{4(1 + U_n)}$

بما أن $0 < U_n < 3$ فإن $\frac{U_n - 3}{4(1 + U_n)} < 0$

ومنه فإن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{U_n}{1 + U_n} - \frac{3}{4} < 0}$

ب - لدينا $3 - U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + U_n}(3 - U_n)$

بما أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{U_n}{1 + U_n} - \frac{3}{4} < 0$

فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{U_n}{1 + U_n} < \frac{3}{4}$

وبالتالي فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{U_n}{1 + U_n}(3 - U_n) < \frac{3}{4}(3 - U_n)$

(لأن $3 - U_n > 0$)

أي $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 3 - U_{n+1} < \frac{3}{4}(3 - U_n)}$

إذن لدينا

$$0 < 3 - U_1 < \frac{3}{4}(3 - U_0)$$

$$0 < 3 - U_2 < \frac{3}{4}(3 - U_1)$$

$$0 < 3 - U_n < \frac{3}{4}(3 - U_{n-1})$$

$$0 < 3 - U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^n . (3 - U_0)$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 < 3 - U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^n (3 - U_0)}$

ج - بما أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 3 - U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^n . 2$

و $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{3}{4} < 1$)

فإن $\lim_{n \to +\infty} (3 - U_n) = 0$

ومنه فإن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 3}$

تمرين 12

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}}$

1) أ - بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ب - بين أن $f(x) \le x$ لكل x من $\mathbb{R}^+$.

ج - حدد صورة المجال $[0, 1]$ بالدالة f.

2) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ لكل n من N.

أ - تحقق أن : $\forall n\in \mathbb{N}\ ;\ U_n\in[0,1]$.

ب - بين أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة.

ج - حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$.

4,5) نقطة) **اكاديمية المحمدية** (دورة فبراير 2001)

الحل

$$f(x)=\frac{x}{1+\sqrt[3]{x}} \qquad ; \quad x\in\mathbb{R}^+$$

1) أ - تغيرات الدالة f.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x})^2}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=+\infty \quad ; \quad f(0)=0$$

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\frac{1+\sqrt[3]{x}-x.\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$=\frac{1+\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt[3]{x}}{3}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}(\sqrt[3]{x})}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$$

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	0 ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}=1$$

من خلال جدول تغيرات الدالة f، f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ و $f(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$ إذن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ب - لدينا

$$f(x)-x=\frac{-x.\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\leq 0$$

إذن $f(x)\leq x$ لكل x من $\mathbb{R}^+$.

ج - لدينا $f([0,1])=[f(0),f(1)]$

أي $\boxed{f([0,1])=\left[0,\frac{1}{2}\right]}$

(2
$$\begin{cases} U_0=\frac{1}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n)\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ - • لدينا $U_0=\frac{1}{2}$ إذن $U_0\in[0,1]$

• نفترض أن : $U_p\in[0,1]$ حيث $p\in\mathbb{N}$.

• لنبين أن :

$$U_p\in[0,1] \Rightarrow f(U_p)\in f([0,1])$$
$$\Rightarrow U_{p+1}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$
$$\Rightarrow U_{p+1}\in[0,1]$$

إذن $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ U_n\in[0,1]}$

ب - • من خلال السؤال 1) ب - لدينا $f(U_0)\leq U_0$

إذن $U_1\leq U_0$

• نفترض أن $U_p\leq U_{p-1}$

$$\left.\begin{matrix} U_p\leq U_{p-1} \\ \text{تزايدية } f\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(U_p)\leq f(U_{p-1})$$
$$\Rightarrow U_{p+1}\leq U_p$$

إذن $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ U_{n+1}\leq U_n}$

وبالتالي المتتالية (U_n) تناقصية.

* بما أن (U_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 0 إذن فهي متقاربة.

ج - بما أن f دالة متصلة على $[0,1]$ و $f([0,1])\subset[0,1]$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ و (U_n) متقاربة فإن نهاية (U_n) ℓ تحقق العلاقة $f(\ell)=\ell$

$$f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \frac{\ell}{1+\sqrt[3]{\ell}}=\ell \Leftrightarrow \ell=0$$

إذن $\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=0}$

تمرين 13

1) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ بما يلي : $h(x) = \frac{x^2}{2 - 3x^2}$

بين أن الدالة h تقابل من المجال $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ إلى مجال I يجب تحديده.

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = a \text{ بحيث } a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ U_{n+1} = h(U_n) : \mathbb{N} \text{ لكل } n \text{ من} \end{cases}$$

أ - بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 < U_n < \frac{1}{2}$.

ب - بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}(U_n + 1)(3U_n - 2)$

ج - ادرس رتابة $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

د - تحقق من أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.

هـ - حدد نهاية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(2001 دورة فبراير) أكاديمية فاس (نقطة 5, 5)

الحل

(1

$$h(x) = \frac{x^2}{2 - 3x^2} \quad ; \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = 0 \quad , \quad \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} h(x) = \frac{1}{5}$$

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\quad ; \quad h'(x) = \frac{4x(1 - 3x^2)}{(2 - 3x^2)^2}$$

x	0	$\frac{1}{2}$
h'(x)	+	
h(x)	0 ↗	$\frac{1}{5}$

بما أن h دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ و $h\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) = \left]0, \frac{1}{5}\right[$

فإن h تقابل من $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ نحو $\left]0, \frac{1}{5}\right[$.

(2

$$\begin{cases} U_0 = a & ; \quad a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ U_{n+1} = h(U_n) & ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ - • لدينا $U_0 = a$ و $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ إذن $U_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

• نفترض أن $U_p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ من أجل p من $\mathbb{N}$.

• لنبين أن $U_{p+1} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

$$U_p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\Rightarrow h(U_p) \in h\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right)$$
$$\Rightarrow U_{p+1} \in \left]0, \frac{1}{5}\right[$$
$$\Rightarrow U_{p+1} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; U_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[}$

ب - لدينا $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^2}{2 - 3U_n^2} - U_n$

$$= \frac{U_n (3U_n^2 + U_n - 2)}{2 - 3U_n^2}$$

$$= \frac{U_n (1 + U_n)(3U_n - 2)}{2 - 3U_n^2}$$

$$= \frac{U_n}{2 - 3U_n^2}(1 + U_n)(3U_n - 2)$$

$$= \frac{U_{n+1}}{U_n}(1 + U_n)(3U_n - 2)$$

ملاحظة : $3x^2 + x - 2 = (1 + x)(3x - 2)$

و $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n}{2 - 3U_n^2}$

إذن

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad U_{n+1} - U_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}(1 + U_n)(3U_n - 2)}$$

ج - لدينا $U_{n+1} - U_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}(1 + U_n)(3U_n - 2)$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < U_n < \frac{1}{2} \\ 0 < U_{n+1} < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} > 0 \text{ و } 1 + U_n > 0 \text{ و } 3U_n - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n}(1 + U_n)(3U_n - 2) < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$$

إذن المتتالية (U_n) تناقصية.

د - بما أن (U_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة.

هـ - بما أن h دالة متصلة على $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ و $h\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$

و $U_{n+1} = h(U_n)$ و (U_n) متقاربة

فإن نهاية ℓ لـ (U_n) تحقق العلاقة $h(\ell) = \ell$ و $\ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{\ell^2}{2 - 3\ell^2} = \ell$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = \ell(2 - 3\ell^2)$$

$$\Leftrightarrow \ell(3\ell^2 + \ell - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell(\ell + 1)(3\ell - 2) = 0$$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ أو $\ell = -1$ أو $\ell = \frac{2}{3}$

إذن

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$$